ENSI
Option P - Session 1979
PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 4 heures

Correction

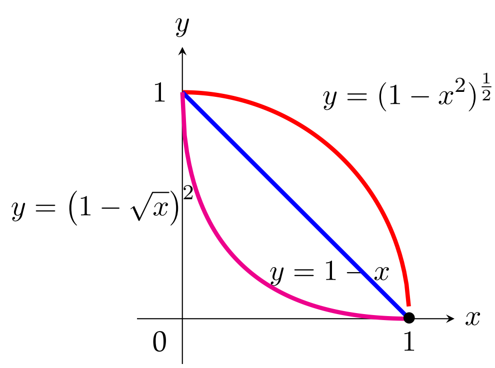
I

1. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $f'_\lambda(x) = -x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}(1-x^{\frac{1}{\lambda}})^{\lambda-1}$, donc $\forall x \in]0,1[$, $f'_\lambda(x) < 0$, ainsi f_λ est strictement décroissante sur $]0,1[$.

D'autre part, $\forall x \in]0,1[$, $f''_\lambda(x) = \dfrac{\lambda-1}{\lambda} x^{\frac{1-2\lambda}{\lambda}}(1-x^{\lambda})^{\lambda-2}$, d'où :

- si $0 < \lambda < 1$, f''_λ est négative sur $]0,1[$, et donc f_λ est strictement concave,
- si $\lambda = 1$, $f_1(x) = 1 - x$, f_λ est donc affine,
- si $\lambda > 1$, f''_λ est positive sur $]0,1[$, et donc f_λ est strictement convexe.

2.
- Γ_1 est le graphe d'une fonction affine, plus précisément Γ_1 est un segment de droite,
- $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ est le graphe $f_{\frac{1}{2}} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ ($x \in [0,1]$), en posant $x = \cos t$ ($0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$) $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ apparait comme étant un quart de cercle,
- Γ_2 est le graphe $f_2 : x \mapsto \left(1-\sqrt{x}\right)^2 = x - 2\sqrt{x} + 1$ ($x \in [0,1]$). Soit $y = f_2(x)$, $(y-x-1)^2 = 4x$ qui est l'équation d'une parabole, donc Γ_2 est un arc de parabole.



3. Pour montrer que la droite $y = x$ est un axe de symétrie, il suffit de vérifier que si $(x,y) \in \Gamma_\lambda$, alors $(y,x) \in \Gamma_\lambda$. On a :

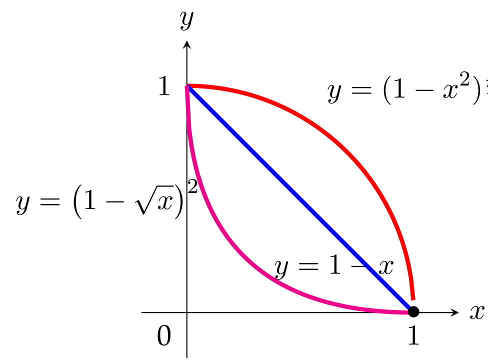
$$\begin{aligned} f_\lambda(y) &= f_\lambda(1-x^{\frac{1}{\lambda}})^\lambda \\ &= \left[1-(1-x^{\frac{1}{\lambda}})^{\lambda\frac{1}{\lambda}})\right]^\lambda \\ &= x \end{aligned}$$

Donc la droite $y = x$ est bien axe de symétrie commun à tous les courbes Γ_λ. L'abscisse S_λ est déterminée par l'équation $(1-x^{\frac{1}{\lambda}})^\lambda = x$, donc $x = \dfrac{1}{2^\lambda}$, d'où $S_\lambda = \left(\dfrac{1}{2^\lambda}, \dfrac{1}{2^\lambda}\right)$.

4. D'après la question 1., on a :
- si $0 < \lambda < 1$, f_λ est strictement concave sur $]0,1[$, donc Γ_λ tourne la concavité vers les $y < 0$,
- si $\lambda = 1$, $\Gamma_1(x)$ est un segment de droite, donc Γ_λ n'a pas de concavité,

- si $\lambda > 1$, f_λ est strictement convexe sur $]0,1[$, donc Γ_λ tourne la concavité vers les $y < 0$.

5.



6. Soit $\lambda = \dfrac{1}{n} < 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), donc $f_{\frac1n}$ est strictement concave, donc on a

$$f_{\frac1n}\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac12 f_{\frac1n}(a) + \frac12 f_{\frac1n}(b)$$

ou encore

$$\frac12(1-a^n)^{\frac1n} + \frac12(1-b^n)^{\frac1n} \leq (1-\frac{a+b^n}{2})^{\frac1n}$$

d'où

$$\frac{1}{2^n}[(1-a^n)^{\frac1n} + (1-b^n)^{\frac1n}]^n \leq 1 - \frac{(a+b)^n}{2^n}$$

finalement,

$$(a+b)^n + [(1-a^n)^{\frac1n} + (1-b^n)^{\frac1n}]^n \leq 2^n.$$

Si $\lambda = n$, alors f_n est strictement convexe. Le même raisonnement montre que

$$\sqrt[n]{a+b} + \sqrt{(1-\sqrt[n]{a})^n + (1-\sqrt[n]{b})^n} \geq \sqrt[n]{2}.$$

II

1. Posons $g_\lambda(t) = t^{\lambda-1}(1-t)^\lambda$. g_λ est continue sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1]$, $|g_\lambda| \leq t^{\lambda-1} = \dfrac{1}{t^{1-\lambda}}$ et comme $1-\lambda < 1$, g_λ est absolument intégrable sur $]0,1]$, par suite $F(\lambda)$ est bien définie pour $\lambda > 0$.

2. L'aire du domaine est donnée par $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 f_\lambda(x)\mathrm{d}x$, avec le changement de variable $x = t^\lambda$, on obtient $\mathscr{A}(\lambda) = F(\lambda)$.

3. (a) L'aire du triangle OAS_λ est $\dfrac{\left(\frac{1}{2^\lambda}\right)\times 1}{2} = \dfrac{1}{2^{\lambda+1}}$.

- si $0 < \lambda < 1$, f_λ est concave sur $]0,1[$, donc $\dfrac{1}{2^{\lambda+1}} \leq \dfrac{F_\lambda}{2}$.
- si $\lambda = 1$, $\dfrac{1}{2^{\lambda+1}} = \dfrac{F_\lambda}{2}$.
- si $\lambda > 1$, f_λ est convexe sur $]0,1[$, donc $\dfrac{1}{2^{\lambda+1}} \geq \dfrac{F_\lambda}{2}$.

(b) Si $\lambda \in]0,1[$, on a $\dfrac{1}{2^\lambda} \leq F(\lambda)$, $\displaystyle\lim_{\lambda\to0}\frac{1}{2^\lambda} = 1$, donc $F(\lambda)$ est inférieure à l'aire du carré de cotés $[OA]$ et $[OB]$, donc $\dfrac{1}{2^\lambda} \leq F(\lambda) \leq 1$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{\lambda\to0} F(\lambda) = 1$.

Si $\lambda > 1$, on a $0 \leq F(\lambda) \leq \dfrac{1}{2^\lambda}$, donc $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = 0$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq F(n) \leq \dfrac{1}{2^n}$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} F(n)$ converge et sa somme vérifie l'inégalité

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après le formule d'intégration par parties généralisée

$$\int_0^b f(x)g^{(n)}(x)\mathrm{d}x = \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k)}(x)g^{(n-k-1)}(x)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}g(x)\mathrm{d}x,$$

on a

$$\begin{aligned} F(n) &= n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t \\ &= n\left[-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}t^{n-1} + \ldots - \frac{(n-1)!(1-t)^{2n}}{(2n)(2n-1)\ldots(n+1)}\right]_0^1 \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad (1) \end{aligned}$$

- La formule de binome donne :

$$(1-t)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{C}_n^k t^k.$$

Donc

$$\begin{aligned} F(n) &= n\int_0^1 t^{n-1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{C}_n^k t^k \mathrm{d}t \\ &= n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{C}_n^k \int_0^1 t^{n+k-1}\mathrm{d}t \\ &= n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\mathrm{C}_n^k}{n+k} \qquad (2) \end{aligned}$$

De (1) et (2) nous déduisons que

$$n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\mathrm{C}_n^k}{n+k} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

III

1. La fonction $x \mapsto y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est solution de (E)si, et seulement si,

$$-2a_0 + 2a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}[(4n-2)a_n - na_{n-1}]x^n = 0,$$

donc $-2a_0 = 0$, $2a_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $(4n-2)a_n = na_{n-1}$, d'où $a_0 = 0$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \geq 2$,

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = F(n).$$

Nous pouvons remarquer que cette relation reste vraie pour $n = 1$. Le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ peut être obtenu par la règle de D'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{4},$$

donc $R = 4$.
D'après ce qui précède, la somme de la série entière de terme général $a_n x^n$ est solution de (E) pour $x \in]-4,4[$. De $a_0 = 0$ et $a_n = F(n)$ $(n \geq 1)$ nous déduisons que $y(1) = \sigma$.

2. (a) Pour $x \in]0,4[$, on pose $u = \sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$, donc $\mathrm{d}x = \dfrac{8u\mathrm{d}u}{(1+-u^2)^2}$, d'où :

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{4-x}{x}}\mathrm{d}x &= -8\int\frac{u^2\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}\\ &= \frac{4u}{1+u^2} - 4\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2)}\\ &= \frac{4u}{1+u^2}4\arctan u + c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

D'où

$$\int\sqrt{\frac{4-x}{x}}\mathrm{d}x = x\sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4\arctan\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) + c.$$

(b) La solution générale y_0 de l'équation homogène associé à (E) est donnée par

$$y_0(x) = k\exp\left(\int\frac{x+2}{x(4-x)}\mathrm{d}x\right), \quad x\in]0,4[, \quad k\in\mathbb{R}.$$

Or $\dfrac{x+2}{x(4-x)} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{3}{2(4-x)}$, donc $\displaystyle\int\frac{x+2}{x(4-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{2}\ln(4-x) + c, \quad c\in\mathbb{R}$ Donc $y_0(x) = k\dfrac{\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}$ $(0 < x < 4)$ où k est une constante réelle.

(c) D'après ce qui précède la solution générale de (E) est donc

$$x \mapsto (x\sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4\arctan\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) + c)\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}},$$

soit

$$x \mapsto \frac{x}{4-x} - \frac{4}{4-x}\sqrt{\frac{x}{4-x}}(\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} - c'), \quad c' = \frac{c}{4}.$$

La constante c' étant fixé, nous avons, pour $0 < x < 4$

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{1}{4-x} - \frac{4}{4-x}\sqrt{\frac{1}{4-x}}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} - c'\right), \quad c' = \frac{c}{4}$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} = \frac{\pi}{2}$, donc si $c' \neq \dfrac{\pi}{2}$, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left|\frac{y(x)}{x}\right| = +\infty$. Si nous voulons une limite finie, nous devrons nécessairement avoir $c' = \dfrac{\pi}{2}$, supposons donc $c' = \dfrac{\pi}{2}$, de la relation $\arctan(t) + \arctan\dfrac{1}{t} = \dfrac{\pi}{2}$ $(t > 0)$ et $\arctan t \sim t$ au voisinage de 0, nous déduisons

$$\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \frac{\pi}{2}x = -\arctan\sqrt{\frac{x}{4-x}} \sim -\sqrt{\frac{x}{2}}$$

au voisinage de 0. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, et donc la solution correspondant à $c' = \dfrac{\pi}{2}$ est donc l'unique solution répondant au problème.

La fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} F(n)x^n$ est aussi solution de (E) sur $]0,4[$ et vérifie

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)}{x} = a_1 = \frac{1}{2}.$$

D'après l'unicité d'une telle solution, on a

$$\forall x \in]0,4[,\ \ \sum_{n=1}^{\infty} F(n)x^n = \frac{x}{4-x} - \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)\sqrt{4-x}}\left(\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Or $\arctan\sqrt{\dfrac{4-x}{x}} - \dfrac{\pi}{2} = -\arctan\sqrt{\dfrac{x}{4-x}}$ et on peut remarquer que la fonction

$$x \mapsto \arcsin\sqrt{\frac{x}{4}} + \arctan\sqrt{\frac{x}{4-x}}$$

est constante sur $[0,4[$ (la dérivée est nulle), comme elle s'annule en $x=0$, elle identiquement nulle, d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)x^n = \frac{1}{4-x}\left(x + 4\sqrt{\frac{x}{4-x}}\arcsin\sqrt{\frac{x}{4}}\right)$$

3. Nous avons $\sigma = y(1)$, donc $\sigma = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)$.

IV

Cherchons λ tel que la tangente à Γ_λ en tout point M de Γ_λ soit découpé par les axes en un segment de longueur 1.

Une représentation paramétrique de la tangente en un point $(x_0, f_\lambda(x_0)$ est donné par $x = x_0 + t$, $y = f\lambda(x_0) + tf'_\lambda x_0)$ où $t \in \mathbb{R}$. Cette tangente coupe Oy au point $\big(0, f_\lambda(x_0) - x_0 f'_\lambda(x_0)\big)$ et coupe l'axe Ox au point $\left(x_0 - \dfrac{f_\lambda(x_0)}{f'_\lambda(x_0))}\right)$ (car $f'_\lambda(x_0) \neq 0$).

λ doit donc vérifier :

$$\forall x \in]0,1[,\ \ \left(x - \frac{f_\lambda(x)}{f'_\lambda(x)}\right)^2 + \big(f_\lambda(x) - x f'_\lambda(x)\big)^2 = 1.$$

Après simplification, cette condition est équivalent à :

$$\forall x \in]0,1[,\ \ x^{\frac{2(\lambda-1)}{\lambda}} + \left(1 - x^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{2(\lambda-1)} = 1.$$

En particulier, au point $x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\lambda}$, nous devons avoir $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\lambda-2} = \dfrac{1}{2}$. Soit $2\lambda - 3 = 0$, $\lambda = \dfrac{2}{3}$. Inversement, la valeur $\dfrac{3}{2}$ convient puisque $\forall x \in]0,1[$, $x^{\frac{2}{3}} + \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right) = 1$.

●●●●●●●●●●●